ТЕОРИЈА НА ОПТИМИЗАЦИЈА И ПРИМЕНА

Елена Гелова[1], Александар Донев[2],

Апстракт

Во овој труд се прикажани основните карактеристики на оптимизацијата и поделбата на проблемите поврзани со оптимизацијата, а пред се со нелинеарното програмирање како област која се изучува под оптимизацијата. Големата важност на нелинераното програмирање, а со тоа и на оптимизацијата придонело нивната примена да биде голема во решавањето на голем број математички проблеми поврзани со наоѓање на максимално или минимално решение. Оптимизацијата наоѓа примена во производството, инвестициите, транспортот, финансиите, прехраната, итн. Во овој труд ќе биде спомнат нелинеарниот транспортен проблем како проблем присутен во секојдневието чие решение е тесно поврзано со оптимизацијата .

Клучни зборови: оптимизација, нелинеарно програмирање, линеарно програмирање, минимална вредност, максимална вредност.

OPTIMIZATION THEORY AND APPLICATION

Elena Gelova[1], Aleksandar Donev[2]

Abstract

This paper shows the basic characteristics of optimization, a division of the problems associated with optimization, primarily with nonlinear programming as an area that is studied under optimization. Great importance of nonlinear programming and thereby contribute to optimization of their application to be great in solving many mathematical problems associated with finding the maximum or minimum solution.The optimization is applied in production investment, transportation, finance, lodging,etc. This paper will be referred to the nonlinear transport problem as a problem present in everyday life whose solution is closely related to optimization.

[1]*Факултет за информатика, Универзитет „Гоце Делчев“ – Штип*
[2]*Факултет за природни и технички науки, Универзитет „Гоце Делчев“ – Штип*
[1]*Faculty of informatics, University “Goce Delchev” - Shtip*
[2]*Faculty od natural and technical sciences, University “Goce Delchev” - Shtip*

Key words: optimization, nonlinear programming, linear programming, minimum value , maximum value.

Вовед

Теоријата на оптимизација се занимава со развој на модели и методи со кои се определуваат оптимални решенија на математички дефинирани проблеми. Проблемите на оптимизација и оптималните процеси ги наоѓаме во многу области на природните, општествените и техничките науки.

Областа на оптимизација која се занимава со линеарните програми се нарекува „линеарно програмирање“. Важна карактеристика на линеарните програми е да линеарните релации кои го одредуваат множеството на дозволени решенија, не се само равенки туку и неравенки. Но покрај линеарни има многу проблеми на оптимизација кои се нелинеарни, т.е. најчесто крајната функцијата или барем едно од ограничувањата е нелинеарна функција. Теоријата на нелинеарното програмирање е многу посложена за разлика од теоријата на линеарното програмирање.

Општо за оптимизација

За да можеме да констатираме дали некое решение е оптимално потребно е да постои мерка со која се одредува неговиот квалитет и ќе овозможува негово спредување со други можни решенија. Во математичкиот модел мора да постои функција со која на секое решение се придружува некој вредност која претставува мерка за квалитет. Таквата функција се нарекува функција на цел и обично се означува со $F(X)$. Задача на оптимизација е одредување на решение кое дава оптимална (минимална или максимална вредност) на функцијата на цел.

Променливите кои што треба да се определат обично се условени со меѓусебни релации и ограничувања. Секое решение кое ги задоволува постоечките ограничувања се нарекува можно решение. Ваквите решенија формираат множество на можни решенија D.

$$D = \{x \epsilon R^n | g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots . . m\}$$

i - индекс на ограничувањето,

m – вкупен број на ограничувања,

$g_i(x)$- функции на ограничувањата.

Променливите кои што треба да се определат обично се условени со меѓусебни релации и ограничувања. Секое решение кое ги задоволува постоечките ограничувања се нарекува можно решение.

Ако со x^* го означиме оптималното решение тогаш вредноста на функцијата $F^* = F(x^*)$ која одговара на оптималното решение x^*, се нарекува оптимална вредност или **оптимум.**

Неопходни претпоставки кои треба да постојат за да може да се оствари една задача на оптимизација се :

1. Објект на оптимизација. Може да биде произволен процес, апарат, итн.

2. Критериум на оптималност кој се нарекува и функција на цел.

3. Управување на објектот на оптимизација. За да може да се изврши процесот на оптимизација потребно е објектот на оптимизација да може да се управува. За да се осигура можноста за управување на објектот на оптимизација неопходно е тој да има управуваки параметри кој ќе можат да се сменуваат независно еден од друг.

4. Метод на оптимзација. За даден управувачки објект и функција на цел неопходно е да се одбере метод за определување на оптимум. Не постои некој универзален метод за решавање на сите задачи на оптимзација. Изборот на метод обично се прави врз основа на функцијата на цел и избраниот објект.

Задачите на оптимизација можеме да ги поделеме како задачи на статичка оптимизација и задачи на динамичка оптимизација. Каи задачите на статичката оптимизација објектот се разгледува во единствена не променлива состојба. Во задачите на динамичката оптимизација целната функција зависи од параметри кои што претставуваат променливи.

Методите на оптимизација можеме да ги поделеме на:

а) Аналитички методи кои се засоваат на аналитичка анализа на изводот на целната функција. Во овие методи екстремната вредност на функцијата $F(X)$ се добива со наоѓање на такви вредности на X за кои $F'(X) = 0$. За поголем број нелинеарни проблеми аналитичките методи не се од посебно значење.

б) Нумерички (итеративни) методи се зановаат на дефинирана нумеричка итерација за приближна апроксимација на решението. Овие методи се најпогодни за програмирање. Се делат во две групи:

-Градиентни методи кои користат извод на целната функција

-Неградиентни методи кои не користат извод на целната функција

в) Графички методи кај кои имаме графичко претставување на целната функција и ограничувањата. Екстремните вредности на целната функција се добиваат од графикот преку пребарување. Овие методи можат да се применат само на целна функција од еден или два управувачки параметри.

г) Експериментални методи каи кој се добива екстрем врз основа на серија извршени експерименти. Експерименталните методи се користат само во случаи кога математичкиот модел на објетот се покажува неадекватен.

Основни особини кои треба да ги задоволува алгоритмот на оптимизација се:

-Конвергенција (добивање нумеричко решение со конечен број на чекори)

-Брза конвергенција (добивање решение за што пократко време и за што помал број израчунати вредности на целната функција)

-Универзалност. Пожелно е алгоритамот да биде применлив на што повеќе класи на задачи. Меѓутоа универзален метод за решавање на сите типови оптимизациони задачи не постои.

Нелинеарен транспортен проблем

Транспортните проблеми во најголем број на случаи се врзани за избор на најповолна варијанта на транспорт која обезбедува трошоците на транспорт да бидат минимални во однос на определена сообраќајна мрежа и транспорни средства. Сепак денес под тој поим се подразбираат и задачите за оптимално разместување на машини, помошни служби, енергетски објекти и друго со цел да се постигне поголема економичност на работата и времето.

Класичниот транспортен проблем се состои во наоѓање на најекономичен план на превоз на производ од еден вид од местото на негово производство до местото на потрошување. Ако во m-складиште има $a_1, a_2, ..., a_m$ количини, а во $n-$продавници се бараат $b_1, b_2, ..., b_n$ количини од еден производ и цената на транспортот е c_{ij}, $(i=1,2,...,m)$ и $(j=1,2,...,n)$, за единица производ од i-тото складиште до j-тата продавница, проблемот за наоѓање економичен план на превоз се сведува на решавање на задачата

$$\min F(x_{ij}) = \min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

со ограничувања

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,$$

каде x_{ij} е количината на производот која треба да се транспортира од i-тото складиште до j-тата продавница. При тоа $x_{ij} \geq 0$.Вака поставениот проблем е проблем на линеарното програмирање во кој трошоците на транспорт $\varphi_{ij}(x)$ се пропорционални на соодветната количина x_{ij} која се транспортира т.е. $\varphi_{ij}(x) = c_{ij}\ x_{ij}$.

Таа претпоставка доведува соодветната целна функција да добие линеарна зависност

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

Меѓутоа, во низата практични задачи кои се однесуваат на решавањето на транспортните проблеми, претпоставката за која веќе стана збор нема место, бидејќи се работи за трошоци кои се нелинеарни во однос на количината на производи кои се транспортираат. Така, на пример, трошоците на транспортот на маршутата $(i-j)$ може да се менуваат по квадратен закон

$$\varphi_{ij}(x)=a_{ij}\,x_{ij}^{2}+b_{ij}x_{ij}\ ,$$

при што целната функција може да се напише во обликот

$$F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\,x_{ij}^{2}+b_{ij}x_{ij}\right).$$

Целната функција, во зависност од природата на транспортниот проблем, може да биде и од некој друг облик на нелинеарната функција. Во одредени случаи, таа може да биде зададена со множеството дискретни вредности, при што за одредени вредности на x имаме зададени вредности на $\varphi_{ij}(x)$. Во тој случај аналитичката зависност на $\varphi_{ij}(x)$ се одредува со помош на интерполација.

Независно од тоа за каква нелинеарна целна функција се работи, задачата за наоѓање на оптималниот план на транспортот се сведува на минимизација зададена со целната функција со облик

$$F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}(x_{ij}),$$

каде $\varphi_{ij}(x_{ij})$ се зададени нелинеарни функции кои зависат од еден аргумент x_{ij} (т.н. сепарабилни функции), при што непознатите x_{ij} мораат да го задоволуваат множеството ограничувања со облик

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\qquad (i=1,2,...,m),$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\qquad (j=1,2,...,n),$$

$$x_{ij}\geq 0\ .$$

Вака формулираната задача спаѓа во класата задачи на НП и се нарекува нелинеарна транспортна задача.

Заклучок

Задачите на нелинеарното програмирање покриваат доста широко подрачје од управувачките задачи и се поразновидни од задачите кои се сведуваат на примена на линеарното програмирање. Многу од нив се уште не се решливи од таа причина што не постојат развиени алгоритми чија примена би можела да даде одредени ефекти. Применливоста на поедини алгоритми се проценува врз основа на бројот на сметачките операции кои треба да се сработат во процесот на наоѓање на решението. Некои алгоритми во одредени задачи на нелинеарното програмирање , дури и кога се има во предвид примената на современите сметачи, не се секогаш применливи. Таа примена зависи од повеќе фактори, посебно од карактерот и димензијата на математичкиот модел, заради кој повеќето од задачите на нелинеарното програмирање во извесна смисла се третираат како истражувачки, а не како рутински задачи.

Нелинеарното програмирање се применува кај некои задачи од транспортен тип, како што се: трошоците во однос на количините на производите кои се транспортираат, кај нелинеарните задачи за распределба на еднородни ресурси, кај нелинеарните задачи за распределба на нееднородни ресурси кои се далеку посложени.

Нелинеарното програмирање наоѓа примена и во изборот на асортиманот на производство, во оптимизација на производство, увоз и извоз како потреба од количините на поедини производи со одредени ограничувања.

Се применува и во воени цели како што е на пример распоред на оружје на противничките цели (за добивање на нивни максимални губитоци), за нанесување на одредени штети кај противникот, под услов на минимални трошоци.

Користена литература:

[1] Kuhn H.Tucker A., Non-Linear Programming, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probality, University of California Press, Berkeley, California, 1950

[2] Slater M. Lagrange Multipliers Revisited, A Contribution to Nonlinear Programming, Cowles Commission Discussion Paper in Mathematics, No. 403, 1950

[3] Dantzing G.B., Linear programming and extensions, Princenton University Press, Princenton, New Jersey, 1963

[4] Dr. Jovan J.Petrić , Operaciona istraźivanja, Naučna knjiga, Beograd 1989

[5] Sanjo Zlobec, Jovan Petrić, Nelinearno programiranje, Naučna knjiga, Beograd, 1989